О ВЫВОДЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СКОРОСТЕЙ ЗВЕЗД ИЗ НАБЛЮДАЕМЫХ РАДИАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ*

(Сообщено Сэром Артуром Эддингтоном)

Одной из наиболее важных проблем звездной статистики является вывод функции распределения пространственных скоростей звезд различных спектральных типов и абсолютных величин в нашей окрестности. Точное решение этой проблемы требует знания пространственных скоростей большого числа звезд. Определение же пространственной скорости данной звезды возможно только в том случае, когда измерены три различные величины: радиальная скорость, собственное движение и параллакс. Эти величины измеряются с различной относительной степенью точности и подвержены систематическим ошибкам совершенно различного рода. Для некоторых важных групп звезд (например, звезд типа B) мы имеем весьма немногочисленные надежные индивидуальные параллаксы. Вообще, число надежных параллаксов обычно мало и сравнительно немногие звезды с известными радиальными скоростями имеют известные параллаксы.

Поэтому некоторые авторы пытались получить сведения о законе распределения пространственных скоростей из одних только радиальных скоростей. Однако в каждом таком случае принимался более или менее произвольный вид этого закона и задача ограничивалась нахождением численных значений некоторых постоянных параметров, входящих в этот закон распределения. В большинстве случаев эти постоянные являются элементами эллипсоидов скоростей.

Благодаря однородности каталогов радиальных скоростей результаты, основанных на них статистических исследований почти свободны от влияния систематических ошибок. Представляется желательным в связи с этим попытаться решить задачу о выводе функции распределения пространственных скоростей из распределения радиальных скоростей, не делая никаких предположений о виде этой функции.

---

* On the Derivation of the Frequency Function of Space Velocities of the Stars from the observed Radial Velocities. MN, **96**, 172, 1935.

Насколько известно автору, эта проблема не только до сих пор остается нерешенной, но даже не обсуждена сколько-нибудь детально.

Целью настоящей статьи является вывод общей формулы, котораа дает нам возможность вычислить функцию распределения пространственных скоростей из распределения радиальных скоростей.

Будет показано, что функция распределения пространственных скоростей является решением некоторого интегрального уравнения. Получаемая из наблюдений функция распределения радиальных скоростей для различных частей неба входит в это уравнение как известная функция. Ниже мы даем вывод этого уравнения и его решение.

Основное допущение. Мы допустим, что различные элементарные объемы пространства в нашей окрестности имеют практически идентичные функции распределения пространственных скоростей. В действительности, при рассмотрении сравнительно редких типов звезд (например, цефеид) необходимо использовать также далекие звезды, так как число звезд таких типов в нашей окрестности очень мало. В таких случаях требуются некоторые поправки за различие между функциями распределения в различных частях Галактики. Действительный процесс введения этих поправок находится вне пределов настоящей статьи. Мы полагаем, что даны радиальные скорости достаточно большого числа близких звезд, расположенных в различных частях неба, и наша цель—вывести функцию распределения пространственных скоростей из этих радиальных скоростей.

Мы сперва рассмотрим двухмерную задачу. Она представляет особый интерес, так как некоторые типы звезд сильно сконцентрированы около галактической плоскости и z-компоненты их скоростей малы.

Двухмерная задача. Если звезды распределены на плоскости и мы расположены в той же плоскости, то для каждой звезды мы можем измерить ее радиальную скорость V и видимое положение или азимут, отсчитанный от некоторого фиксированного направления. В случае звезд с высокой галактической концентрацией роль такого азимута играет галактическая долгота. Пусть $f(V, \alpha)\, dVd\alpha$ будет число наблюдаемых звезд с азимутами между α и $\alpha + d\alpha$ и радиальными скоростями между V и $V + dV$. Функция $f(V, \alpha)$ должна быть получена из каталогов радиальных скоростей звезд. Если, далее, $n(\alpha)\, d\alpha$ есть общее число звезд, наблюдаемых в направлениях между α и $\alpha + d\alpha$, то мы имеем:

$$n(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(V, \alpha)\, dV.$$

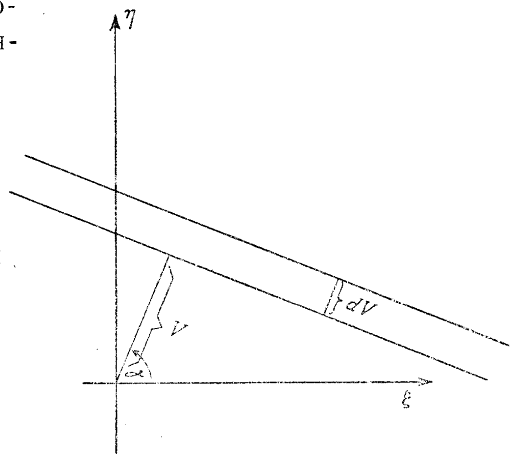
Пусть $\psi(\xi, \eta)$ будет неизвестная функция распределения истинных скоростей. Согласно определению, $\psi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$ есть относительное число звезд, для которых компоненты скоростей находятся в пределах ξ и $\xi + d\xi$, η и $\eta + d\eta$. Мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta)\, d\xi = 1.$$

Среди наблюдаемых звезд с азимутами, заключенными в интервале $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, мы имеем $n(\alpha)\, d\alpha \psi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$ звезд со скоростями, заключенными внутри элемента $d\xi d\eta$ „плоскости скоростей“ $\xi\eta$.

Мы можем направить ξ — ось к азимуту $\alpha = 0$. Тогда ясно, что все звезды, наблюдаемые в азимуте α, для которых скорости лежат внутри полоски S плоскости $\xi\eta$ (см. рис.), имеют радиальные скорости, лежащие между V и $V + dV$. Поэтому из $n(\alpha)\, d\alpha$ звезд, внутри интервала $(\alpha, \alpha + d\alpha)$,

$$n(\alpha)\, d\alpha \int_{(S)} \psi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$



звезды будут иметь радиальные скорости, заключенные между V и $V + dV$. Интегрирование выполняется по полоске (S), перпендикулярной к направлению α и шириной dV.

С другой стороны, число таких звезд мы обозначили через

$$f(V, \alpha)\, dV d\alpha.$$

Поэтому мы имеем уравнение:

$$f(V, \alpha)\, dV = n(\alpha) \int_{(S)} \psi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{1}$$

Введем под знак интеграла вместо ξ и η новые координаты:

$$\xi' = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha,$$

$$\eta' = -\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha.$$

Ясно, что внутри полоски (S) ξ' меняется между V и $V + dV$, а η' меняется между $-\infty$ и $+\infty$. Следовательно,

$$\int\limits_{(S)} \psi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta) = \int\limits_{V}^{V+dV} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi' \cos\alpha - \eta' \sin\alpha,\ \xi' \sin\alpha + \eta' \cos\alpha)\, d\eta'.$$

Если разделим уравнение (1) на $n(\alpha)$ и положим

$$F(V, \alpha) = \frac{f(V, \alpha)}{n(\alpha)} = \frac{f(V, \alpha)}{\int f(V, \alpha)\, dV},$$

мы получим уравнение

$$F(V, \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(V\cos\alpha - \eta' \sin\alpha,\ V\sin\alpha + \eta' \cos\alpha)\, d\eta'. \tag{2}$$

Левая часть этого уравнения может быть получена из подсчетов звезд в каталогах радиальных скоростей.

Возвращаясь к старым координатам ξ и η, мы можем уравнение (2) написать в следующем виде:

$$F(V, \alpha) = \int\limits_{(L)} \psi(\xi, \eta)\, ds, \tag{3}$$

где интегрирование выполняется по прямой линии (L), определяемой уравнением

$$\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha = V, \tag{4}$$

а ds представляет элемент этой линии.

Уравнение (3) выражает следующую задачу:

Величина интеграла (3) для каждой прямой линии в плоскости ξ, η дается как функция параметров V и α, определяющих прямую. Должна быть найдена подинтегральная функция $\psi(\xi, \eta)$.

Решение этой задачи сравнительно просто. Введем в обе части (2) вместо V выражение

$$V = x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \tag{5}$$

где x, y и W—некоторые определенные параметры. Тогда (2) можно переписать в виде:

$$F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x\cos^2\alpha + y\sin\alpha\cos\alpha + W\cos\alpha - \eta'\sin\alpha,$$
$$x\cos\alpha\sin\alpha + y\sin^2\alpha + W\sin\alpha + \eta'\cos\alpha)\, d\eta'.$$

Если ввести новую переменную интегрирования

$$\eta' = U - x\sin\alpha + y\cos\alpha, \tag{6}$$

то наше уравнение примет простой вид:

$$F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x + W\cos\alpha - U\sin\alpha,$$

$$y + W\sin\alpha + U\cos\alpha)\,dU. \tag{7}$$

Умножая обе части этого уравнения на $d\alpha$, интегрируя между 0 и 2π и изменяя порядок интегрирования в правой части, мы найдем:

$$\int_0^{2\pi} F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_0^{2\pi} \psi(x + W\cos\alpha - U\sin\alpha,$$

$$y + W\sin\alpha + U\cos\alpha)\,d\alpha. \tag{8}$$

Теперь легко видеть, что интеграл

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \psi(x + W\cos\alpha - U\sin\alpha, y + W\sin\alpha + U\cos\alpha)\,d\alpha \tag{9}$$

зависит только от x, y и $\sqrt{W^2 + U^2}$. В самом деле, если введем в (9)

$$\left.\begin{aligned} W &= G\cos\beta \\ U &= G\sin\beta \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

мы получим:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \psi[x + G\cos(\alpha + \beta),\ y + G\sin(\alpha + \beta)]\,d\alpha,$$

и, очевидно, этот интеграл зависит только от x, y и $G = \sqrt{W^2 + U^2}$ и не зависит от $\beta = \operatorname{arc} tg \dfrac{U}{W}$.

Поэтому мы можем написать просто:

$$\Phi(x, y, G) = \int_0^{2\pi} \psi(x + G\cos\alpha, y + G\sin\alpha)\,d\alpha \tag{11}$$

и

$$\int_0^{2\pi} F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, G)\, dU. \tag{12}$$

Однако

$$dU = \frac{G dG}{\sqrt{G^2 - W^2}},$$

и мы можем переписать (12) в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \alpha)\, d\alpha = 2\int_W^{\infty} \Phi(x, y, G) \frac{G dG}{\sqrt{G^2 - W^2}}. \tag{13}$$

Это уравнение является интегральным уравнением типа Абеля для функции $\Phi(x, y, G)$ и его решение дается формулой:

$$\Phi(x, y, G) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{G}\frac{d}{dG}\int_G^{\infty} \frac{W dW}{\sqrt{W^2 - G^2}} \int_0^{2\pi} F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \alpha)\, d\alpha. \tag{14}$$

Согласно (11) имеем:

$$\Phi(x, y, 0) = 2\pi\psi(x, y), \tag{15}$$

и мы можем переписать (14) в виде

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2}\lim_{G\to 0}\frac{1}{G}\frac{d}{dG}\int_G^{\infty} \frac{W dW}{\sqrt{W^2 - G^2}} \bar{F}(x, y, W), \tag{16}$$

где функция

$$\bar{F}(x, y, W) = \int_0^{2\pi} F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + W, \alpha)\, d\alpha \tag{17}$$

может быть получена из наблюдений. После некоторых преобразований мы можем привести (16) к виду

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{1}{W}\frac{d\bar{F}(x, y, W)}{dW}\, dW. \tag{18}$$

Эта формула дает решение нашей задачи. Численное определение $\bar{F}(x, y, W)$, когда функция $F(V, \alpha)$ задана, может быть выполнено без затруднения.

Мы практически применили нашу формулу к радиальным скоростям звезд типа B, наблюдаемых в галактическом поясе $|b| < 20^\circ$ и результаты применения находятся в удовлетворительном согласии с распределением скоростей, выведенным из прямых подсчетов известных пространственных скоростей. Подробности этого применения будут даны в другом месте.

Трехмерная задача. В случае трехмерной задачи мы можем из каталогов определить число звезд, наблюдаемых внутри данного телесного угла $d\omega$ в данном направлении, имеющих радиальную скорость, заключенную в интервале от V до $V+dV$. Обозначим это число через $f(V, l, b)\,d\omega$, где l и b—галактическая долгота и широта. Если, далее, общее число наблюдаемых звезд в том же телесном угле $n(l, b)\,d\omega$, то мы будем иметь:

$$n(l, b) = \int f(V, l, b)\,dV. \tag{19}$$

Как и в случае двухмерной задачи, мы имеем следующее соотношение между функцией распределения пространственных скоростей $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ и наблюдаемой функцией $f(V, l, b)$:

$$f(V, l, b)\,dV = n(l, b) \iiint\limits_{\Omega} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi d\eta d\zeta, \tag{20}$$

где интегрирование распространяется на объем (Ω) в $\xi\eta\zeta$-пространстве, заключенный между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными к направлению (l, b) и имеющими расстояния V и $V+dV$ от начала.

Деля (20) на $n(l, b)$, после некоторых преобразований мы можем привести это уравнение к виду:

$$F(V, l, b) = \iint\limits_{(\Sigma)} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\,d\sigma, \tag{21}$$

где

$$F(V, l, b) = \frac{f(V, l, b)}{n(l, b)}, \tag{22}$$

а интегрирование распространяется на плоскость (Σ), перпендикулярную к направлению (l, b) и находящуюся на расстоянии V от начала.

Уравнение этой плоскости дается формулой:

$$\xi \cos l \cos b + \eta \sin l \cos b + \zeta \sin b = V. \tag{Σ}$$

Если мы введем в плоскости (Σ) полярные координаты ρ и θ с началом в точке

$$\xi = V\cos l\cos b;\ \eta = V\sin l\cos b;\ \zeta = V\sin b,$$

то для точек этой плоскости мы будем иметь:

$$\xi = V\cos l\cos b + \rho\,(\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta),$$
$$\eta = V\sin l\cos b + \rho\,(\alpha_2\cos\theta + \beta_2\sin\theta),$$
$$\zeta = V\sin b + \rho\,(\alpha_3\cos\theta + \beta_3\sin\theta),$$

где коэффициенты α_1, α_2, α_3 и β_1, β_2, β_3 удовлетворяют условиям:

$$\alpha_1\cos l\cos b + \alpha_2\sin l\cos b + \alpha_3\sin b = 0,$$
$$\beta_1\cos l\cos b + \beta_2\sin l\cos b + \beta_3\sin b = 0,$$
$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1;\quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1.$$

Теперь мы можем переписать уравнение (21) в этих координатах:

$$F(V, l, b) = \int\limits_0^\infty \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} \psi\,[V\cos l\cos b + \rho\,(\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta),\ V\sin l\cos b + \rho\,(\alpha_2\cos\theta + \beta_2\sin\theta),\ V\sin b + \rho\,(\alpha_3\cos\theta + \beta_3\sin\theta)]\,d\theta.$$

Интегрируя по всем направлениям и изменяя порядок интегрирования в правой части, мы получим:

$$\int F(V, l, b)\,d\omega = \int \Phi\rho d\rho, \tag{23}$$

где

$$\Phi = \int d\omega \int\limits_0^{2\pi} \psi\,[V\cos l\cos b + \rho\,(\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta),\ V\sin l\cos b + \rho\,(\alpha_2\cos\theta + \beta_2\sin\theta),\ V\sin b + \rho\,(\alpha_3\cos\theta + \beta_3\sin\theta)]\,d\theta.$$

Если мы введем новые параметры:

$$V = G\gamma_1;\quad \rho\cos\theta = G\gamma_2;\quad \rho\sin\theta = G\gamma_3;\quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

интеграл Φ примет вид:

$$\Phi = \int d\theta \int \psi\,[G(\gamma_1 \cos l \cos b + \gamma_2\alpha_1 + \gamma_3\beta_1),$$
$$G(\gamma_1 \sin l \cos b + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\beta_2),$$
$$G(\gamma_1 \sin b + \gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\beta_3)]\,d\omega,$$

и можно показать, что он зависит только от G. Можем написать

$$\Phi(G) = 2\pi \int \psi\,(G \cos l \cos b,\ G \sin l \cos b,\ G \sin b)\,d\omega;\ \Phi(0) = 8\pi^2\psi(0, 0, 0). \tag{24}$$

Теперь мы имеем:

$$G^2 = V^2 + \rho^2; \quad \rho d\rho = G dG.$$

Следовательно,

$$\int F(V, l, b)\,d\omega = \int_V^\infty \Phi G dG \tag{25}$$

и

$$\Phi = -\frac{1}{V} \cdot \frac{d}{dV} \int F(V, l, b)\,d\omega. \tag{26}$$

Сравнивая (26) с (24), мы найдем:

$$\psi(0, 0, 0) = \frac{1}{8\pi^2}\Phi(0) = -\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \cdot \frac{d}{dV} \int F(V, l, b)\,d\omega.$$

Таким образом мы можем найти $\psi(0, 0, 0)$. Тем же путем после длинных преобразований мы получим:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{8\pi^2}\,\frac{1}{W}\,\frac{d}{dW} \int F(\xi \cos l \cos b + \eta \sin l \cos b + \zeta \sin b + W, l, b)\,d\omega.$$

Эта формула представляет решение трехмерной задачи.

Заключительные замечания. Многие детали вышеизложенного метода еще не рассмотрены. Например, в нашем методе предполагается, что K-эффект отсутствует, так как при наличии K-эффекта функция распределения пространственных скоростей различна в различных направлениях. В действительности, однако, мы можем K-член определить из радиальных скоростей и исключить его.

Рассмотрение практической части предложенного выше метода с применением к некоторым классам звезд будет дано в ином месте*.

Астрономическая обсерватория
университета, Ленинград
20 ноября 1935 г.

* См. следующую статью этого сборника. *Ред.*